M

No. of Printed Pages : 8

First Term Examination, 2015-16

Subject : Mathematics

Class : XII

Time : 3 Hrs.] **[M. M. : 100**

General Instructions :

1. All questions are compulsory.
2. Please check that this question paper contains 26 questions.
3. Questions 1-6 in section A are Very Short Answer Type questions carrying one mark each.
4. Questions 7-19 in section B are Long Answer I Type questions carrying 4 marks each.
5. Questions 20-26 in section C are Long Answer II Type questions carrying 6 marks each.
6. Please write down the serial number of the question before attempting it.

सामान्य निर्देश –

1. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
2. कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 26 प्रश्न हैं।
3. खण्ड–अ के प्रश्न संख्या 1-6 तक अति लघु उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए 1 अंक निर्धारित है।
4. खण्ड–ब के प्रश्न संख्या 7-19 तक दीर्घ उत्तर I प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए 4 अंक निर्धारित हैं।
5. खण्ड–स के प्रश्न संख्या 20-26 तक दीर्घ उत्तर II प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए 6 अंक निर्धारित हैं।
6. उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए।

SECTION : A

खण्ड – अ

1. If A is a square matrix of order 3 and $|\text{adj } A| = 144$, then find the value of $|3A|$.
   यदि A एक 3 कोटि का वर्गाकार आव्यूह है और $|\text{adj } A| = 144$ है, तो $|3A|$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. Evaluate : $\int \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\,dx$.

   $\int \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

P.T.O.

3. Evaluate : $\int_2^4 \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

$\int_2^4 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. If $3\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi$, then find the value of x.

यदि $3\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

5. Differentiate $\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ with respect to x.

$\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

6. If $A=\begin{bmatrix}1 & -5\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 9 & -6\end{bmatrix}$, find a matric 'C' such that $2A+3B=2C$.

यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -5\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 8\\ 9 & -6\end{bmatrix}$ है, तो एक आव्यूह C ज्ञात कीजिए जबकि $2A + 3B = 2C$.

SECTION : B
खण्ड – ब

7. Prove that : $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)=\frac{2b}{a}$.

सिद्ध कीजिए : $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)=\frac{2b}{a}$.

8. Solve the differential equation :

$dy = (2 - y \operatorname{cosec} x)\cos x\,dx$

Given $y=2$, when $x=\frac{\pi}{2}$.

OR

Find the particular solution of the differential equation :

$$\frac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2$$

Given that when $x=0, y=0$.

अवकल समीकरण को हल कीजिए –

$dy = (2 - y \operatorname{cosec} x)\cos x\,dx$

दिया है जब $x=\frac{\pi}{2}$ है, तो $y=2$.

अथवा

अवकल समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए —

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$$

दिया है जब $x = 0$ तो $y = 0$.

9. Solve the differential equation :

$$(x - y)\frac{dy}{dx} = (x + 2y)$$

अवकल समीकरण $(x - y)\frac{dy}{dx} = (x + 2y)$ को हल कीजिए।

10. Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 4x}{x^2}, & x < 0 \\ 8, & x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{16 + \sqrt{x}} - 4}, & x > 0 \end{cases}$$

is continuous at $x = 0$.

दिखाइए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 4x}{x^2}, & x < 0 \\ 8, & x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{16 + \sqrt{x}} - 4}, & x > 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर सतत् है।

11. If $x = \sin t, y = \sin pt$, then prove that

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + p^2 y = 0$$

OR

If $y = x\log\left(\frac{x}{a+bx}\right)$, then prove that

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{a}{a+bx}\right)^2.$$

यदि $x = \sin t, y = \sin pt$ तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + p^2y = 0.$$

अथवा

यदि $y = x\log\left(\frac{x}{a+bx}\right)$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{a}{a+bx}\right)^2.$$

12. Using elementary transformation, find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

प्रारंभिक रूपांतरण के प्रयोग से आव्यूह $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

13. Evaluate : $\int \frac{\sqrt{x^2+1}\left\{\log\left(x^2+1\right)-2\log x\right\}}{x^4}\,dx, x>0.$

ज्ञात कीजिए : $\int \frac{\sqrt{x^2+1}\left\{\log\left(x^2+1\right)-2\log x\right\}}{x^4}\,dx, x>0.$

14. Evaluate : $\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx.$

OR

Evaluate : $\int (x-3)\sqrt{x^2+3x-18}\,dx.$

ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx.$

M

अथवा

ज्ञात कीजिए : $\int (x-3)\sqrt{x^2+3x-18}\,.$

15. Using differentials, find the approximate value of $f(5.001)$, where $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$.

OR

Find the equations of tangents to the curve $3x^2 - y^2 = 8$ which passes through the point $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$.

अवकल का प्रयोग करके, $f(5.001)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए जबकि $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$.

अथवा

वक्र $3x^2 - y^2 = 8$ पर स्पर्श रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ से गुजरती है।

16. Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$.

ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$.

17. Three schools X, Y and Z organized a mela for collecting funds for helping the rehabilitation of flood victims. They sold hand-made fans, mats and plates from recycled material at a cost of Rs. 30, Rs. 100 and Rs. 50 each respectively. The number of articles sold are given below :

Article \ School	X	Y	Z
Hand-fans	50	30	40
Mats	60	50	70
Plates	30	40	50

Using matrix, find the funds collected by each school separately by selling the above articles. Also find the total funds collected for the purpose. Write one value generated by the above situation.

तीन विद्यालय X, Y तथा Z बाढ़ द्वारा विस्थापित लोगों की सहायता के लिए राशि एकत्रित करने के लिए एक मेला लगाते हैं, जिनमें बच्चों द्वारा पुन: चक्रित वस्तुओं के प्रयोग से बने हाथ पंखे, चटाइयाँ तथा प्लेटें बेची जाती हैं, जिनमें से प्रत्येक का मूल्य क्रमश: Rs. 30, Rs. 100 तथा Rs. 50 है। मेले में बिक्री हेतु उपरोक्त वस्तुओं की संख्या निम्न है –

वस्तु \ विद्यालय	X	Y	Z
हाथ पंखे	50	30	40
चटाइयाँ	60	50	70
प्लेटें	30	40	50

P. T. O.

आव्यूह का प्रयोग करके तीनों विद्यालयों द्वारा उपरोक्त वस्तुओं की बिक्री से अलग-अलग एकत्रित राशि ज्ञात कीजिए तथा उनका योग भी ज्ञात कीजिए। उपरोक्त द्वारा जनित एक मूल्य भी लिखिए।

18. Check whether the relation R in IR defined by $R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$ is reflexive, symmetric or transitive.

जाँच कीजिए कि क्या वास्तविक संख्याओं के समुच्चय IR में $R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R, स्वतुल्य, सममित या सकर्मक है?

19. Verify Rolle's theorem for the function :

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2, 2]$$

फलन $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2, 2]$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

SECTION : 'C'
खण्ड – 'स'

20. Using properties of determinants, show that :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

21. Evaluate $\int_2^5 (2x - 3x^2)\,dx$ as a limit of a sum.

योग की सीमा के रूप में $\int_2^5 (2x - 3x^2)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

22. Using integration, find the area bounded by the lines $x + 2y = 2$, $y - x = 1$ and $2x + y = 7$.

OR

Find the area of the region in the first quadrant enclosed by the y-axis, the line $y = x$ and the circle $x^2 + y^2 = 32$, using integration.

समाकलनों के प्रयोग से, रेखाओं $x + 2y = 2$, $y - x = 1$ और $2x + y = 7$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अथवा

समाकलनों के प्रयोग से प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 32$, रेखा $y = x$ तथा y-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

23. If $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, find A^{-1}.

Hence, solve the system of linear equations :

$3x - 2y + z = 2$

$2x + y - 3z = -5$

$-x + 2y + z = 6$

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

A^{-1} का प्रयोग करके, निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए –

$3x - 2y + z = 2$

$2x + y - 3z = -5$

$-x + 2y + z = 6$

24. An open box with square base is to be made out of a given quantity of sheet of area a^2 sq. units. Show that the maximum volume of the box is $\frac{a^3}{6\sqrt{3}}$ Cubic units.

OR

Show that the maximum volume of the cylinder which can be inscribed in a sphere of radius $5\sqrt{3}$ cm is 500π cm^3.

वर्गाकार आधार का एक खुला संदूक बनाया गया जिसमें लगी चादर का क्षेत्रफल a^2 है। सिद्ध कीजिए कि संदूक का अधिकतम आयतन $\frac{a^3}{6\sqrt{3}}$ है।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि एक गोले के अन्तर्गत, जिसकी त्रिज्या $5\sqrt{3}$ सेमी है, का अधिकतम आयतन 500π सेमी^{3} है।

25. Find the intervals in which the function $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ is strictly increasing or decreasing. Also, find the points on which the tangents are parallel to x-axis.

अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ निरंतर वर्धमान या ह्रासमान है। बिन्दु भी ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है।

26. Consider $f : \mathbb{R}_+ \to [-9, \infty)$ given by $f(x) = 5x^2 + 6x - 9$. Show that f is invertible with $f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{54+5y} - 3}{5}$.

$f(x) = 5x^2 + 6x - 9$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : \mathbb{R}_+ \to [-9, \infty)$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है तथा $f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{54+5y} - 3}{5}$.